Q1)

$$u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 3 = \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4$$

$$u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 3 = \frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5$$

$$u_3 = \frac{1}{2} u_2 + 3 = \frac{1}{2} \times 5 + 3 = \frac{11}{2}$$

Q2a) Il s'agit de montrer qu'il existe un nombre réel k tel que

$$\forall \quad n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = k \times v_n .$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\
&= \frac{1}{2} u_n + 3 - 6 \\
&= \frac{1}{2} u_n - 3 \\
&= \frac{1}{2} (v_n + 6) - 3 \\
&= \frac{1}{2} v_n + 3 - 3 \\
&= \frac{1}{2} v_n
\end{aligned}$$

Q2b) On a établi en Q2a) que la suite $\left(v_n\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Par suite

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

avec

$$v_0 = u_0 - 6 = 2 - 6 = -4$$

de telle sorte que

$$v_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

D'autre part v_n est défini par $v_n = u_n - 6$ ce qui équivaut à

$$u_n = v_n + 6.$$

En conclusion

$$u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6.$$

Q3) $$S = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{i}=n} u_{\mathrm{i}} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

$$=(v_0+6)+(v_1+6)+\ldots+(v_n+6)$$

$$=(v_0+v_1+\ldots+v_n)+(6+6+\ldots+6)$$

$$=\left[-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^0-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^1-\ldots-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+(n+1)6$$

$$=-4\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+(n+1)6$$

$$=-4\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+(n+1)6$$

$$=-8\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)6$$

$$=-8+\frac{8}{2^{n+1}}+6n+6$$

$$=6n-2+\frac{4}{2^n}.$$